PH LUZERN
PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE

Lernwerkstatt

3D

Die mathematische Welt der Körper

Dossier Lehrpersonen

Herbst 2019

(Letzte Änderung: 21-10-19lam)

Einführung

Geometrie gilt als ältestes Teilgebiet der Mathematik. Sie leistet einen wichtigen Beitrag zur Erweiterung der Lebens- und Erfahrungswelt, zur Entfaltung des räumlichen Wahrnehmens und Denkens. Sie unterstützt die Entwicklung des Orientierungsvermögens, zeichnerische Fähigkeiten und die Präzisierung der Sprache.

In der Lernumgebung «**3D – Die mathematische Welt der Körper**» mit dem Fokus «Erlebnis Form und Raum» können die Jugendlichen mit Hilfe herausfordernder wie alltäglicher Materialien Eigenschaften und Gesetzmässigkeiten verschiedener Körper und geometrische Sätze selbständig im Team entdecken.

Die verschiedenen Exponate beziehen sich dabei auf die Inhalte der Sekundarstufe 1. Im Fokus stehen dabei zentrale Eigenschaften von regelmässigen Körpern und die Oberfläche und das Volumen von Pyramide und Kugel.

Entdeckungen in der Lernwerkstatt

Vorwissen über Begriffe, Eigenschaften, Netze und Berechnungen

- **Einstieg – Für Ordnung sorgen**
  Im Einstieg sortieren die SuS verschiedene Objekte aus dem Alltag nach ihren Eigenschaften und weissen die passenden Netze und Volumenformeln zu. Das Mustererkennen und Strukturieren als wichtige mathematische Tätigkeit steht hier im Vordergrund.

Polyeder und archimedische Körper

Ein reichhaltiges Entdeckungs-Potential bieten Körper, die aus reguläre Vielecken aufgespannt werden. Drei Stationen führen an dieses heran.

- **Station A: Körper aus Würfeln schneiden**
  Die SuS schneiden aus einem Würfel selbstständig anhand von Auftrögen geleitet Platonische und Archimedische heraus und erarbeiten die speziellen Eigenschaften.
- **Station B: Platonische und archimedische Parkette**
  Die Tatsache, dass es nur 5 platonische Körper gibt, beruht darauf, dass die Winkelsumme an den Kanten eines Körpers kleiner als 360° sein muss. Ist dies nicht der Fall, erhalten wir eine Ebene. Wir untersuchen, wie sich mit regulären Vielecken Ebenen lückenlos ausfüllen lassen.
- **Station C: Der Eulersche Polyedersatz**
  Ein spannender ungeahnter Zusammenhang ergibt sich bei Polyedern zwischen Kanten, Ecken und Flächen. Dieser Zusammenhang wird nicht nur an Körpern direkt untersucht. Es werden mathematischen Brücken zu anderen Themen gebaut.

Volumen und Oberfläche

Ein wichtiger Bestandteil des Schulcurriculums ist es, auf algebraischem Weg Volumen und Oberflächenformel herzuleiten. Im Einstieg wird dies überblicksartig und mit einem Fokus auf die

Eigenschaften des Prismas angebahnt. Anhand von zwei Stationen wird zudem exemplarisch ein enaktiven Zugang zu Herleitung von Oberflächen- und Volumenformeln ermöglicht.

- **Station D: Faszination Pyramidenvolumen**
  Die SuS erstellen lebensgrosse Nachbildungen von Pyramiden mit Tennisbällen. Sie vergleichen das Volumen von Prismen und Pyramiden in Umschütt- und Wäge-Versuchen. Sie Bauen Prismen aus volumengleichen Pyramdien zusammen und führen mit Hilfe von Holzwürfeln Approximations-Überlegungen zum Pyramidenvolumen durch.
- **Station E: Damit es rund läuft – die Kugel**
  Das Volumen und die Oberfläche von der Kugel werden anhand von dreidimensionalen Objekten erarbeitet. Dazu dient eine Adaption des Orangenexperiments mit Hilfe von Seiten, sowie eine aus Pyramiden zusammengesetzte «Disco-Kugel».

Zurück im Klassenzimmer

Viele der Aufträge lassen sich während der Zeit in der Lernwerkstatt nicht vollumfänglich durchdenken und behandeln. Die gesammelten Aufträge sowie die in der Lernwerkstatt genutzten digitalen Dateien werden daher für die Weiterarbeit im Unterricht zur Verfügung gestellt. Das vorliegende Dossier soll zudem helfen, die Themen im Unterricht aufzugreifen.

Zu jeder Station gibt es daher

- **eine Sachanalyse**
  Klärung der fachlichen Hintergründe der Station
- **Lösungen zu den Aufträgen und Aufgaben**
  und Lösungshinweise, falls es keine eindeutigen Lösungen gibt.
- **Ideen zur Fortführung im Klassenzimmer**
  Weiterführende Aufträge und Hinweise zur Weiterarbeit

Kompetenzenabdeckung im Lehrplan 21

In praktisch allen Stationen inkl. dem Einstieg wird in verschiedenen Kompetenzen des Lehrplan 21 gearbeitet. Die meisten sind im Kompetenzbereich Form und Raum eingeordnet, bei einigen Stationen lassen sich aber auch Bezüge zu Kompetenzen im Bereich Zahl und Variable herstellen. Schwerpunktmässig wird in dieser Lernwerkstatt an den folgenden Kompetenzen gearbeitet:

MA.2.B.1 Die Schülerinnen und Schüler können geometrische Beziehungen, insbesondere zwischen Längen, Flächen und Volumen, erforschen, Vermutungen formulieren und Erkenntnisse austauschen.

MA.2.B.2 Die Schülerinnen und Schüler können Aussagen und Formeln zu geometrischen Beziehungen überprüfen, mit Beispielen belegen und begründen.

MA.2.C.3 Die Schülerinnen und Schüler können sich Figuren und Körper in verschiedenen Lagen vorstellen, Veränderungen darstellen und beschreiben (Kopfgeometrie).

MA.2.A.1 Die Schülerinnen und Schüler können Körper durch ihre Eigenschaften beschreiben ([…] Flächeninhalt, Volumen, […]).

Inhaltsverzeichnis

Einstieg – Für Ordnung sorgen

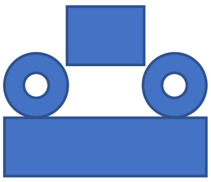
       

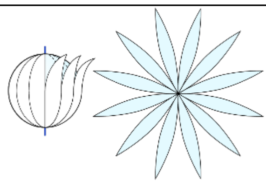
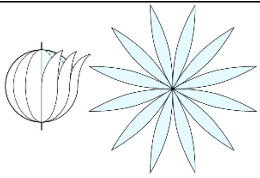
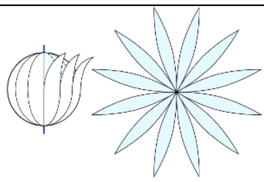
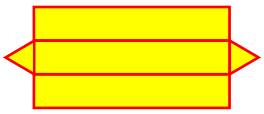
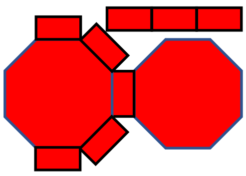
Sachanalyse

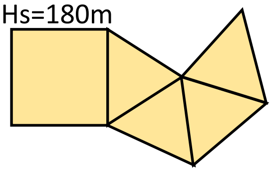
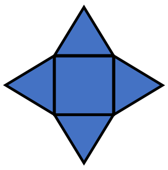
Ziel ist das Erkennen mathematisch klassifizierbarer Eigenschaften verschiedener Gegenstände durch Abstraktion.

Gegenstände werden zunächst als Körper wahrgenommen und erst durch die genaue Betrachtung in die Zweidimensionalität aufgebrochen. Entsprechend ist simultane Behandlung von 2- und 3-dimensionalen Formen wünschenswert. Ein Körper mit einer parallel zur Grundfläche in eine Richtung verschobenem Abbild der Grundfläche wird als Zylinder bezeichnet. Besteht im beschriebenen Fall die Grundfläche aus einem n-Eck, wird von einem Prisma gesprochen. Ist die Grundfläche ein Kreis, spricht man von einem Kreiszylinder. Bei Verschiebungsrichtungen senkrecht zur Grundfläche wird von geraden Zylindern/Prismen gesprochen.

Lösungen zu den Aufträgen und Aufgaben

Gegenstand	Bild	Netz (Abwicklung)	Formal (Volumen)	Oberfläche
WC-Rolle			$r_g{}^2\pi \cdot h - r_k{}^2\pi \cdot h$ = $(r_g{}^2 - r_k{}^2)\pi \cdot h = (5{,}25^2 - 2^2)\pi \cdot 9{,}5$ = 703.2 cm³ ≈703cm³	$(r_g{}^2\pi - r_k{}^2\pi)\cdot 2 + (U_g + U_k)\cdot h = (5{,}25^2\pi - 2^2\pi)\cdot 2 + (2\cdot 5{,}25 \cdot \pi + 2\cdot 2 \cdot \pi)\cdot 9{,}5 = 148 + 432.8$ ≈ 581cm²
Lollypop – Büchse				
Konserven-dose				

Aftereight			$r^2\pi \cdot h =$ $(2{,}6cm)^2\pi \cdot 14{,}5cm$ $\approx 308cm^3$	$r^2\pi \cdot 2 + U \cdot h =$ $2{,}6^2\pi \cdot 2 + 5{,}2cm \cdot$ $\pi \cdot 14{,}5cm = 42{,}7 +$ $236.9 = 279.6\ cm^2 \approx$ $280cm^2$
Erdkugel- Atlas			$\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$ $\frac{4}{3} \cdot r(xxcm)^3 \cdot \pi$	$4 \cdot \pi \cdot r^2$ $\frac{4}{3} \cdot (xxcm)^3 \cdot \pi$
Pingpongball			$\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$ $\frac{4}{3} \cdot 2^3 \cdot \pi = 34cm^3$	$4 \cdot \pi \cdot r^2$ $4 \cdot \pi \cdot (2cm)^2$ $= 50cm^2$
Tennisball			$\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$	$4 \cdot \pi \cdot r^2$
Würfelsäckli Platonische Körper		Kompliziert, wird weggelassen.	Kompliziert, wird weggelassen.	Kompliziert, wird weggelassen.
Toblerone Dreiecks- prisma			$V = \frac{s \cdot h}{2} \cdot l$ $V = \frac{3{,}5 \cdot 3}{2} \cdot 20{,}5$ $= 107{,}6cm^3$	$2 \cdot \frac{s \cdot h}{2} + 3 \cdot s \cdot l$ $O = 2 \cdot Dreieck + 3 \cdot Rechteck$ $O = 2 \cdot \frac{g \cdot h_b}{2} + 3 \cdot g \cdot h$ $O = 2 \cdot \frac{3{,}5 \cdot 3}{2} + 3 \cdot 3{,}5 \cdot 20{,}5$ $O = 10{,}5 + 215{,}25$ $O = 225{,}75\ cm^2$
Celebration			$V = \frac{s \cdot h_s}{2} \cdot 8 \cdot h$ $V = \frac{7{,}5 \cdot 9}{2} \cdot 8 \cdot 4{,}5$ $= 1215cm^3$	$O = \frac{s \cdot h_s}{2} \cdot 8 \cdot 2 + s \cdot h \cdot 8$ $O = \frac{7{,}5 \cdot 9}{2} \cdot 8 \cdot 2 + 7{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot 8$ $O = 540 + 270 = 810cm^2$
PET-S ammel- behälter				

Pyramide Ägypten		H=139m; S=230m; Hs=180m  Netz im Massstab 1:5000	$\frac{s^2 \cdot h}{3} = \frac{230^2 \cdot 139}{3}$ $= 2\,451\,000m^3$	$s^2 + \frac{s \cdot h_s}{2} \cdot 4$ $= s^2 + s \cdot h_s \cdot 2$ $= 230^2 + 230 \cdot 180 \cdot 2 = 135\,700m^2$
Pyramide Louvre[1]		H=21.6m S=34m H_s=27.5m  Netz im Massstab 1:1000	$\frac{s^2 \cdot h}{3}$ $\frac{34^2 \cdot 21{,}6}{3}$ $=8323m^3$	$s^2 + \frac{s \cdot h_s}{2} \cdot 4$ $= s^2 + s \cdot h_s \cdot 2$ $= 34^2 + 34 \cdot 27{,}5 \cdot 2$ $=3026m^2$

Ideen zur Fortführung im Klassenzimmer

- Prismen selbst erstellen lassen mit festem Papier und Abdeckband
- Stelle die Alltagsgegenstände mit dem vorhandenen Material nach!
- Definiere die Kriterien, die für die Nachstellung entscheidend sind.
- Wenn ihr das jemandem erklären müsstet, auf was muss geachtet werden?
  - Herausforderung / Input: Was passiert nun, wenn ich es verschiebe?
  - Was darf ich weiter abändern, damit es immer noch ein Prisma ist?
- Folgeauftrag: Welche Prismen findest du mit Google?
- Kannst du diese auch herstellen, darstellen?
- Weiterführende Regiefragen:
  - Es wurden nur gerade Prismen erstellt, beobachtet
  - Weiterführung auf schiefe Prismen.

[1] https://www.parismalanders.com/louvre-pyramide-paris-fakten-hoehe-baujahr-und-co/

Station A – Aus Würfeln regelmässige Körper schneiden

Sachanalyse

Aus dem Würfel lassen sich durch Abschneiden von Ecken oder Kanten oder Verbinden besonderer Punkte auf dem Würfel die folgenden regelmässigen Körper herstellen:

Platonische Körper

- Tetraeder: Zwei Diagonalen bilden, die restlichen Ecken abschneiden. Das Volumen entspricht einem Drittel des Würfelvolumens: Man schneidet vom Würfel vier kongruente Pyramiden weg. Jede Pyramide hat als Grundflächen eine diagonal halbierte Seitenfläche des Würfels und ist gleich hoch ist wie der Würfel, weist also 1/6 des Volumens des Würfels auf.
- Oktaeder: Alle Kanten bis zur Mitte hin abschneiden. Alternativ können auch die Flächenmitten verbunden werden (Auftrag 2). Das Volumen im Vergleich zum Würfel erhält man, indem man das Oktaeder durch die Mittelebenen des Würfels zerschneidet. Es entstehen acht Teilwürfel. Vergleicht man einen Achtelwürfel mit dem Teil des Oktaeders, der in diesem Achtelwürfel liegt (eine Pyramide mit halber Grundfläche des Achtelwürfels), so entspricht das Volumen 1/6 des Würfels.
- Ikosaeder: Goldene Rechtecke in die Körpermitte einfügen und die Eckpunkte der Rechtecke zu Dreiecken verbinden.

Archimedische Körper

e und k bezieht sich auf die Geogebra-Datei und beschreibt den Hakenabstand auf der jeweiligen Kante

- Abgestumpftes Hexaeder: Ecken abschneiden (e=0.2928)
- Kuboktaeder: Ecken abschneiden (e=0.5)
- Rhombenkuboktaeder: Kanten abschneiden (k=0.2928)
- Oktaederstumpf: Kanten (k=0.25) und Ecken (e=0. 5) abschneiden
- Kuboktaederstumpf: Kanten (k=0.185) und Ecken (e=0.2928) abschneiden oder Ecken abschneiden (e=0.55) und die Quadrate passen einsetzen (geht nicht in der Geogebra-Datei, nur sinnvoll, falls es jemand am Würfelmodell selber probieren will).
- Wenn man aus dem Würfel zuerst das Tetraeder herstellt, kann man zusätzlich den Tetraederstumpf herstellen.

- Theoretisch liesse sich aus dem Würfel auch das abgeschrägte Hexaeder durch schräges Abschneiden von Kanten herstellen, allerdings ist das in der Praxis sehr schwierig zu bewerkstelligen. Man könnte allenfalls die verdrehten Quadrate mithilfe zweier Parallelogramme in die Seitenflächen einhängen und dann mit den Kordelhaken alle Dreiecke aufspannen. Der Aufwand dafür wäre aber enorm und das Resultat vermutlich nicht sehr genau.
- Dodekaeder: Das Herstellen von Walmdächern für den Würfel wäre mit grösserem Aufwand verbunden, theoretisch aber machbar. Die notwendigen Teile wurden aber für diese Lernumgebung nicht hergestellt. Man kann beim Ikosaeder (siehe oben) zumindest in Gedanken die Flächenmitten verbinden und kommt so zum (dualen) Dodekaeder.
- Mithilfe verschiedener Geogebra-Dateien können auch alle weiteren Archimedischen Körper durch Abschneiden von Ecken und / oder Kanten oder Verdrehen von Seitenflächen des Hexaeders oder Dodekaeders gewonnen werden. Diese Dateien sind Teil des Materials für weiterführende Aufträge im Anschluss an den Besuch der Lernwerkstatt. Sie sind für die Lehrperson erhältlich.

Berechnungen

Bei einigen Körpern kann es auch Lernenden gelingen, durch Berechnungen zu verifizieren, dass es wirklich regelmässige Körper sind: Tetraeder, Oktaeder, Kuboktaeder, Oktaederstumpf. Bei den anderen Körpern führen die Berechnungen über etwas kompliziertere Gleichungen mit Wurzeltermen, die vermutlich in der Sekundarschule nicht mehr machbar sind.

Vernetzung mit der Lehrmittelbuchreihe «mathbuch»

Platonische und Archimedische Körper sind im LP21 nicht explizit vorgesehen und auch im mathbuch «nur» als Projekt berücksichtigt (mathbuch 3 LU 25 resp. mathbuch 3+ LU 30).

Lösungen zu den Aufträgen und Aufgaben

Lösungen zu den Aufträgen kann man der Sachanalyse entnehmen. Die Berechnungen der Kantenlängen sind hier nicht ausführlich ausgeführt und müssen im Einzelfall angeschaut und besprochen werden.

Ideen zur Fortführung im Klassenzimmer

Platonische Körper

Wenn man Platonische Körper herstellen will (vgl. Aufträge 1 bis 3 aus der LWS), ist es vermutlich einfacher, diese über das Netz zu «erfalten». Ein möglicher Auftrag könnte so aussehen:

> *Studiere diese Sachinformationen und frage nach, wenn du etwas nicht verstehst:*
>
> Platon (427 – 348 / 347 v. Chr.) war ein berühmter griechischer Philosoph. Wie alle Philosophen der Antike betrieb er auch Physik und Mathematik. Er beschrieb die regelmässigen, geometrischen Körper. Regelmässig bedeutet bei Platon:
>
> – Alle Flächen des Körpers bestehen aus kongruenten, regelmässigen Vielecken.
> – An jeder Ecke stossen gleich viele Flächen zusammen.
> – Der Körper ist konvex. Dieser Fachbegriff bedeutet, dass ein Körper nur nach aussen gekrümmt ist, also keine «Dellen» hat.
>
> *Mögliche Aufgaben:*
>
> – Experimentiere mit den «Polydron»-Teilen (oder selber aus dickem Papier oder Halbkarton hergestellten regelmässigen Dreiecken, Vierecken, Fünfecken und Sechsecken). Aus welchen Vielecken lassen sich Platonische Körper herstellen? Wie viele Vielecke braucht man jeweils? Achtung, pro Vieleck-Sorte gibt es teilweise mehrere Lösungen!
> – Stelle mit Hilfe von Geogebra alle Platonischen Körper aus Papier her. Zeichne dazu in Geogebra das Netz des Körpers, drucke es auf festes Papier, schneide es aus und klebe das Netz zum Körper zusammen.
> – Wie viele unterschiedliche Platonische Körper sind möglich? Begründe bzw. beweise deine Aussage.

Möchte man trotzdem alle Platonischen Körper aus dem Würfel herleiten, kann man die Aufträge 1 bis 3 für Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder verwenden und diese Seite für den Dodekaeder: http://www.prof-dr-berger.de/_figurint-dod.htm

Archimedische Körper

Für die Arbeit mit Archimedischen Körpern gilt:

- Mithilfe der Geogebra-Datei «Wuerfel Kanten und Ecken abschneiden» lassen sich grundsätzlich die Aufträge 4 bis 10 der Lernwerkstatt direkt im Klassenzimmer bearbeiten.
- Sinnvollerweise geht man dabei von Aufträgen aus, die Schülergruppen während des Besuchs der LWS selber bearbeitet haben und bespricht die Erkenntnisse (und allenfalls auch Probleme, z. B. bei den Berechnungsaufgaben)
- Man kann danach ausgewählte Aufträge die gesamte Klasse bearbeiten lassen und besprechen oder
- verschiedene Aufträge in Gruppen arbeitsteilig bearbeiten lassen und die Ergebnisse zusammentragen und wieder besprechen.
- Mithilfe der weiterführenden Geogebra-Dateien zu regelmässigen Körpern können alle anderen Archimedischen Körper gewonnen werden.

  - Die Aufträge lassen sich analog aus der Arbeit mit dem Würfel ableiten.
  - Bei den abgeschrägten Körpern werden nicht Ecken abgeschnitten, sondern es wird ein Archimedischer Körper durch gleichzeitiges Drehen bestimmter Flächen eines anderen Archimedischen Körpers gewonnen.
- Thema «globale Uniformität»: Vergleiche den Rhombenkuboktaeder mit dem Pseudorhombenkuboktaeder (am besten stellt man sie beide aus Papier oder mit Polydrons her, falls vorhanden). Weshalb *ist* der Rhombenkuboktaeder ein Archimedischer Körper und weshalb ist der Pseudorhombenkuboktaeder *kein* Archimedischer Körper? Vergleiche dazu die Eigenschaften von Archimedischen Körpern (siehe Informationsblatt) bei beiden Körpern!
- Mithilfe der Seite https://polyhedra.tessera.li/ lassen sich weitere wunderbare Dinge rund um regelmässige (aber auch andere) Körper erkunden, leider ist die Seite nur auf Englisch verfügbar. Die Bedeutung der Icons der Operationen erschliessen sich aber sehr intuitiv, insbesondere, weil die Animation mithilft.

Produktbeurteilung

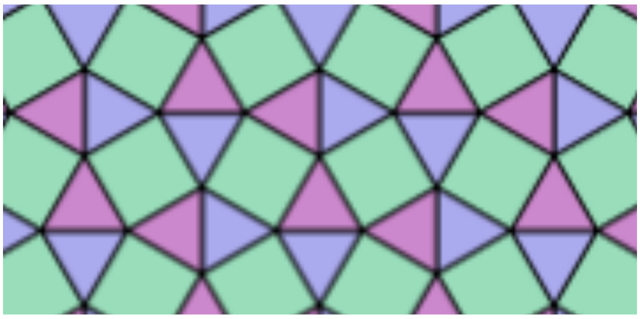
Möchte man aus der Arbeit an Platonischen / Archimedischen Körpern die Beurteilung eines Produkts ableiten, könnte ein Raster wie folgt aussehen. In diesem Beispiel wurde auch der Eulersche Polyedersatz miteinbezogen, natürlich kann man den auch weglassen. Zudem wurde das Führen eines Merkhefts (Lernjournals) während der Arbeit als Begleitauftrag erteilt und in die Beurteilung miteinbezogen.

(siehe nächste Seite)

Beurteilung Platonische / Archimedische Körper

	Selbst-beurteilung					Fremd-beurteilung			
	sehr gut	gut	genügend	ungenügend		sehr gut	gut	genügend	ungenügend
Platonische Körper Du stellst alle Platonischen Körper korrekt her. Du begründest stichhaltig, weshalb es nur diese Platonischen Körper gibt.	○	○	○	○		○	○	○	○
Archimedische Körper Du stellst mehrere Archimedische Körper mit 2 Vielecksorten her, einen davon aus Papier. Du stellst Archimedische Körper mit 3 Vielecksorten her, einen davon aus Papier. Du stellst Archimedische Körper mit unterschiedlicher Anzahl Flächen pro Ecke her, einen davon aus Papier.	○	○	○	○		○	○	○	○
Zusammenhang Flächen, Kanten, Ecken Du findest einen oder mehrere Zusammenhänge zwischen den Anzahl Flächen, Kanten und Ecken eines Körpers. Du begründest den Zusammenhang.	○	○	○	○		○	○	○	○
Verarbeitung Die Netze wurden sorgfältig ausgeschnitten und die Modelle sorgfältig zusammengeklebt. Skizzen und Tabellen sind aussagekräftig. Texte sind sauber und verständlich geschrieben.	○	○	○	○		○	○	○	○
Merkheft Die Einträge sind vollständig und reichhaltig. Du notierst Erkenntnisse aus den Lektionen und beschreibst sie nachvollziehbar. Du reflektierst dein Lernen (gemachte Fehler und Konsequenzen, Probleme und Lösungsideen, Arbeitsverhalten, Sozialverhalten etc.) substanziell. Die Darstellung ist übersichtlich, klar strukturiert und sauber.	○	○	○	○		○	○	○	○
Gesamtbeurteilung	○	○	○	○		○	○	○	○

Station B – Platonische und Archimedische Parkette

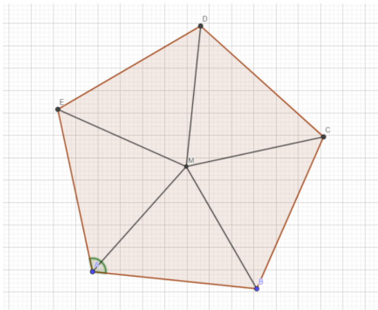


Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Parkettierung

Sachanalyse

Parkettierungen

Bei einem regulären Polygon (oder n-Eck) sind alle Seiten und Winkel gleich gross. Mit Blick auf das Parkettieren spielen die Innenwinkel der Polygone eine herausragende Rolle. Auf der Grundlage der Innenwinkelsumme bei Dreiecken (180°) kann man die Innenwinkelsumme jedes beliebigen Polygons berechnen:



Ein Fünfeck beispielsweise kann in fünf (beliebige) Dreiecke zerlegt werden, wobei jedes eine Innenwinkelsumme von 180° hat. Damit haben wir aber 360° zu viel, weil von jedem Dreieck ein Winkel bei Punkt M liegt, der nichts zur Innenwinkelsumme des Fünfecks beiträgt. Somit müssen also 180° subtrahiert werden. Für ein beliebiges n-Eck ergibt sich aufgrund dieser Überlegungen folgende Formel für die Innenwinkelsumme:

$$S = n \cdot 180° - 360°$$

Weil nun bei einem regulären Polygon jeder Winkel gleich gross ist, kann man die Innenwinkelsumme durch n teilen und wir erhalten für einen Innenwinkel eines n-Ecks:

$$\alpha = \frac{n \cdot 180° - 360°}{n} = 180° - \frac{360°}{n}$$

Damit nun die Ebene mit Polygonen parkettiert werden kann, muss die Summe der Innenwinkel in jeder Ecke 360° betragen, weil sonst Überlappungen oder Lücken entstehen. Mit Fünfecken klappt dies beispielsweise nicht, es entsteht also eine Lücke und man spricht nicht von einem (vollständigen) Parkett.

Ein Platonisches Parkett entsteht nun, wenn man mit einer Sorte von regulären Polygonen parkettieren kann. Das ist auf 3 Arten möglich, nämlich mit regulären Dreiecken, Vierecken und Sechsecken.

Von einem Archimedischen Parkett hingegen sprechen wir, wenn man nicht nur eine Sorte von regulären Vielecken zulässt, sondern mehrere. Zudem müssen alle Eckenmuster gleich sein. Davon gibt es acht. Man kann jedes dieser Parkette mit einem Code beschreiben, wobei dieser die Eckenmuster beschreibt. 6-6-6 bedeutet beispielsweise, dass drei Sechsecke Ecke an Ecke zusammengelegt werden.

Folgende Archimedische Parkette sind möglich:

> 3-3-3-4-4; 3-3-4-3-4; 3-6-3-6; 3-3-3-3-6; 3-4-6-4; 3-12-12; 4-8-8; 4-6-12

Neben den Archimedischen Parketten gibt es auch sogenannte semireguläre Parkette. Diese unterscheiden sich von den Archimedischen darin, dass nicht alle Eckenmuster gleich sind. Es gibt also mindestens zwei unterschiedliche Muster, an denen die Ecken zusammentreffen. Zum Beispiel:

> 3-3-4-3-4 und 3-3-3-3-3-3 (2 Varianten); 3-3-6-6 und 3-3-3-3-3-3; 3-3-6-6 und 3-6-3-6; 3-4-4-6 und 3-6-3-6; 3-3-4-12 und 3-3-3-3-3-3

Insgesamt gibt es 20 verschiedene semireguläre Parkette.

Vernetzung mit der Lehrmittelbuchreihe «mathbuch»

Parkette lassen sich bei verschiedenen Themen im Mathematikunterricht einbauen. Explizit werden sie im mathbuch im Projekt «Flächenornamente» thematisiert (mathbuch 2 LU37) und im Projekt «Regelmässige Körper» (mathbuch 3 LU 25 resp. mathbuch 3+ LU 30) kann das Thema ebenfalls aufgegriffen werden.

Lösungen zu den Aufträgen und Aufgaben

Lösungen zu den Aufträgen kann man der Sachanalyse oben entnehmen.

Ideen zur Fortführung im Klassenzimmer

- Mithilfe von Geogebra (Werkzeug «Regelmässige Vielecke») kann man sehr schnell und einfach Parkette zeichnen.
- Erforschen und argumentieren, welche Parkette mit zwei, drei, vier, ... Typen von regelmässigen Vielecken überhaupt möglich sind. Ggf. systematisch untersuchen.

Station C – Der Eulersche Polyedersatz

Quellen: https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler#/media/File:Leonhard_Euler.jpg, https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper#/media/Datei:Platonische_Koerper_im_Bagno.jpg

Sachanalyse

Der Eulerscher Polyedersatz:

Kanten = # Flächen + # Ecken - 2

Im Beweis von Staudt werden dazu Polyedernetze betrachtet und es wird zwischen Faltkanten und Klebekanten unterschieden.

Dort lässt sich der folgende Zusammenhang nachweisen, aus dem der Polyedersatz direkt folgt:

Faltkanten = # Flächen - 1 # Klebekanten = # Ecken - 1

Dieser Nachweis soll von den Schülerinnen und Schülern in dem Exponat heuristisch entdeckt werden und in unterschiedlichen Facetten enaktiv erfasst werden. Das Ziel ist, dass die Schülerinnen und Schüler Analogien zwischen unterschiedlichen Situationen herstellen und Zusammenhänge erkennen:

Auftrag C1: Das Schokoladenproblem

Ausgangslage liefert das **Schokoladenproblem**. Hier gilt zu entdecken:

Brechungen = # Schokoladenstückchen - 1

Auftrag C2: Das Nagelbrett

Bei dem **Nagelbrett** kann folgender Zusammenhang entdeckt werden:

Gummiringe =# Punkte - 1

Auftrag C3: Polyedernetze

Siehe oben.

Auftrag C4: Das Spiel «Rosenkohl»

Es handelt sich um ein Zwei-Personen-Spiel. Auf einem Blatt Papier befinden sich vier Kreuze, mit je vier armen. Die Spieler verbinden abwechselnd zwei beliebige Arme auf dem Blatt Papier und erzeugen durch einen Querstrich auf der Linie zwei neue Arme. Beim Verbinden zweier Arme darf dabei keine bestehende Linie gekreuzt werden.

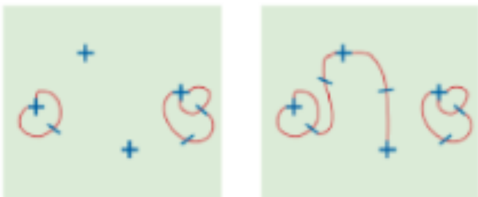
Berendonk (2014): Im Land des Polyedersatzes, S. 6

Bei diesem Spiel lassen sich analog zum Eulerschein Polyedersatz Zusammenhänge erkennen, die dabei helfen können, vorherzusagen, wer das Spiel gewinnt.

Dazu benötigen wir unterschiedliche Begriffe zur Beschreibung der Situation:

Verbindungslinien teilen das Blatt in unterschiedliche ***Gebiete*** (auch das Aussen-Gebiet zählt als ein Gebiet). Ein Zug kann nur innerhalb eines Gebiets erfolgen. Die beiden oben dargestellten Spielsituationen enthalten ein Gebiet (links) und vier Gebiete (rechts).

Komponenten sind alle Kreuze, die durch Linien verbunden sind. Die beiden folgenden Spielsituationen hier bestehen aus vier Komponenten (links) und zwei Komponenten (rechts).



Berendonk (2014): Im Land des Polyedersatzes, S. 6

Während eines Spiels gibt es Züge, die zwei Arme trennen, die danach nicht mehr zu verbinden sind. Dann sprechen wir von **trennenden Zügen**. Ist das nicht der Fall, werden stets zwei Komponenten verbunden. Dann sprechen wir von **verbindenden Zügen**.

Folgende Zusammenhänge können dann entdeckt werden:

Verbindende Züge = # Komponenten - 1

Zu Beginn unseres Spieles gibt es 4 Komponenten (da vier Kreuze vorgegeben sind), jeder verbindende Zug senkt die Anzahl der Komponenten um 1, damit sind maximal 3 verbindende Züge in unserem Fall möglich. Würden wir mit mehr oder weniger Kreuzen starten, hätte das daher auch einen Einfluss auf die Anzahl der verbindenden Züge, die während des Spiels möglich sind (vgl. Nagel-Brett-Problem).

Trennende Züge = # Gebiete - 1

Am Anfang des Spieles besteht das Zeichenblatt nur aus einem Gebiet. Am Ende ist die Anzahl der Gebiete stets der Anzahl der Arme (in unserem Fall 16). Um ein Gebiet in 16 Teile zu teilen, benötigen wir 15 trennende Züge (vgl. Schokoladenproblem).

Insgesamt gilt

Züge = # Komponenten + # Gebiete - 2

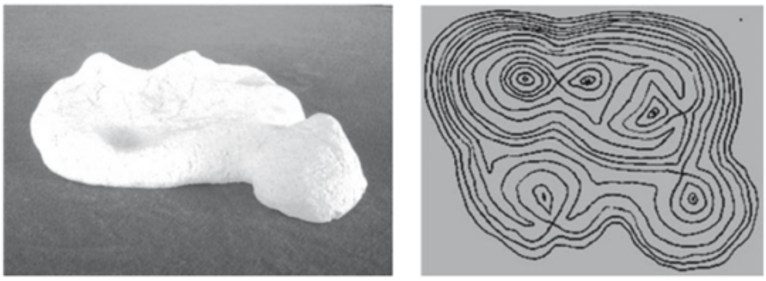
Die Anzahl der Komponenten und Anzahl der Gebiete am Ende des Spieles ist beides durch die Anzahl der Kreuze zu Beginn des Spieles vorgegeben und unabhängig vom Spielverlauf. Damit ist auch die Anzahl der Züge durch die Anzahl der Kreuze bzw. Arme vorherbestimmt. (In unserem Fall # Züge= 15+3=18. Es verliert also stets der Spieler der beginnt.)

Auftrag C5: Höhenkarten einer Insel (Zusatz fürs Klassenzimmer)

Als zweites Anwendungsfeld können die SuS den Zusammenhang

Pässe = # (Berge + Täler) - 1

anhand einer Höhenkarte erkunden und einen Zusammenhang zum Schokoladenproblem herstellen.



Berendonk (2013): Erkundungen zum Polyedersatz, S. 100

Vernetzung mit der Lehrmittelbuchreihe «mathbuch»

Der Polyedersatz selbst ist nicht fester Bestandteil des Schulcurriculums. Allerdings bietet er die Möglichkeit der vertieften Auseinandersetzung mit Körpern, dem Analysieren ihrer Eigenschaften und dem Suchen nach Gemeinsamkeiten, das sind Mustern und Strukturen. Die Station bietet die Möglichkeit, dies enaktiv zu erkunden und Bezüge zu anderen Situationen herzustellen.

Im mathbuch lässt sich das Thema beim Projekt «Regelmässige Körper» (mathbuch 3 LU 25 resp. mathbuch 3+ LU 30) gut einbauen.

Lösungen zu den Aufträgen und Aufgaben

Auftrag C1: Das Schokoladenproblem

Ziel ist zu erkennen, dass die Anzahl der Brechungen gerade eins weniger ist als die Anzahl der Stückchen.

- **Aufgabe 1:** aus 12 Teilen. Möglich wären: Eine Reihe mit zwölf Stückchen, zwei Reihen mit sechs Stückchen, drei Reihen mit vier Stückchen, vier Reihen mit drei Stückchen, sechs Reihen mit zwei Stückchen oder zwölf Reihen mit jeweils einem Stückchen.
- **Aufgabe 2:** Man muss 999-mal brechen, bis alle Stückchen zerteilt sind.
- **Aufgabe 3:** Die Anzahl der Brechungen ist um eins kleiner als die Anzahl der Stückchen. Da die Tafel quadratisch ist, ist die Anzahl der Stückchen quadratisch. Die Anzahl der Brechungen kann damit keine Quadratzahl sein.

Auftrag C2: Das Nagelbrett

Ziel ist zu erkennen, dass genau ein Gummiring weniger benötigt wird als die Anzahl der zu verbindenden Nägel.

Auftrag C3: der Polyedersatz

Ziel ist die Erkenntnis, dass KK=E-1 und FK=F-1 ist.

- **Aufgabe 1:** Es gibt jeweils sieben Klebekanten
- **Aufgabe 2:** Angenommen, es gäbe zwei solche Wege, dann würden diese beiden Wege zusammen eine geschlossene Linie bilden. Wenn wir dann aber das Netz entlang der blauen Kanten ausschneiden, zerfällt es in zwei Teile. Das kann aber nicht sein! Aufgabe. Eine anspruchsvolle Aufgabe, Wer Schwierigkeiten mit der Aufgabe hat, sollte sich zuerst an Aufgabe 3 versuchen.
- **Aufgabe 3:** hier sollen die SuS den Eulerschen Polyedersatz in verschiedenen Beispielen bestätigen.

Auftrag C4: Das Spiel «Rosenkohl»

Ziel ist die in den anderen Stationen entdeckten Zusammenhänge auf eine neue Situation zu übertragen.

- **Aufgabe 1:** 1 Komponente, 6 Gebiete
- **Aufgabe 2:** In der letzten Spielsituation ist kein trennender Zug möglich. Bei einem trennenden Zug bleibt die Anzahl der Komponenten gleich, die Anzahl der Gebiete steigt um 1.
- **Aufgabe 3:** In allen Situationen ist ein verbindender Zug möglich. Die Anzahl der Komponenten sinkt um 1, die Anzahl der Gebiete bleibt gleich.

Ideen zur Fortführung im Klassenzimmer

An dieser Station haben die SuS den **Eulerschen Polyedersatz** erarbeitet. Dabei ging es bewusst darum Zusammenhänge in unterschiedlichen Situationen herauszuarbeiten und zu verallgemeinern. Diese Zusammenhänge können im Unterricht anhand der Aufträge nochmal aufgegriffen werden. Zum Auftrag C1 «Schokoladenproblem» und C3 «Polyedernetze» gibt es bei den Aufträgen Zusatzaufgaben, die während der Lernwerkstatt selbst selten gelöst werden. Diese helfen das Ergebnis zu sichern und können im Unterricht genutzt oder zumindest aufgegriffen werden. Vermutlich lohnt es auch den Übergang von den «Falt- und Klebekanten» zu den «Kanten» insgesamt im Unterricht zu thematisieren.

Der Auftrag C4 «Das Spiel Rosenkohl» und sowie der nicht in der Lernwerkstatt erhaltene Auftrag C5 «Höhenkarte einer Insel» können im Unterricht genutzt werden, um die Inhalte der Station auf neue Situationen zu übertragen.

Station D – Pyramidenvolumen

Bildquellen: ak-ladies-open.de, de.wikipedia.org

Sachanalyse

Bau-Ecke

- Für eine zehnstöckige vierseitige Pyramide braucht es 1+4+9+16+25+36+49+64+81+100= 385 Tennisbälle.
  Allgemein: Anzahl Stockwerke = n, $1+4+9+...+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- Für eine zehnstöckige dreiseitige Pyramide braucht es 1+3+6+10+15+21+28+36+45+55= 220 Tennisbälle
  Allgemein: Anzahl Stockwerke = n, $1+3+6+...+n(n+1)/2=n(n+1)(n+2)/6$

Beide Verallgemeinerungen lassen sich u. a. mittels vollständiger Induktion beweisen.

Konstruktions-Ecke

Das Pyramidenvolumen (einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche) kann mit Hilfe von sechs kongruenten Pyramiden, welche sich zu einem Würfel zusammensetzen lassen, herleiten.

$$V_W=s^3,\ V_P=V_W/6=s^3/6$$

Drei Pyramiden ergeben folglich das halbe Würfelvolumen:

$$3(s^3/6)=s^3/2$$

Die Höhe des halben Würfels entspricht der Höhe der Pyramiden, also folgt

$$V_P=s^2*h/3\ .$$

Drei Dreieckspyramiden werden zu einem Dreiecksprisma zusammengebaut (oder drei Viereckspyramiden zu einem Quader/Würfel). Um von diesen Spezialfällen auf die allgemeine Pyramide zu schliessen, braucht es das Prinzip von Cavalieri.

Umschütt- und Wäge-Ecke

Hier stellt sich die Frage: Wann ist ein Beweis ein Beweis?

Theorie-Ecke

Variante 1

Bildet man den Grenzwert für n gegen Unendlich (n=Anzahl Schichten) des Verhältnisses von "Umwürfel" zu "Pyramide" so konvergiert die Folge. Beweis: n^3 ausklammern, kürzen, Nullfolgen eruieren, fertig.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\right)=\frac{6n^3}{2n^3+3n^2+n}=3$$

Variante 2

Infinitesimalrechnung

Vernetzung mit der Lehrmittelbuchreihe «mathbuch»

Das Pyramidenvolumen wird im mathbuch 3 LU 10 / mathbuch 3+ LU 14 sowohl über Umschüttversuche als auch über das Annähern mittels Würfel thematisiert. Diese Herangehensweise wird in dieser Station aufgegriffen.

Lösungen zu den Aufträgen und Aufgaben

Auftrag D1: Pyramiden bauen

Vorbereitung

Das Vorwissen der SuS soll mit der vorliegenden Schätzfrage aktiviert werden. Schätzen unterscheidet sich von blossem Raten! Beim Schätzen wird auf bekannte Repräsentanten zurückgegriffen.

Aufgabe 1

Eventuell müssen die beiden Rahmen nachjustiert werden, da die Tennisbälle kleine Abweichungen in ihrer Grösse aufweisen.

Aufgabe 2

Die SuS werden durch Abzählen und/oder geschicktes Rechnen auf die korrekte Anzahl Tennisbälle kommen.

Pyramide mit quadratischer Grundfläche: 385 Tennisbälle

$n = Anzahl\ Stockwerke$

$$1+4+9+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pyramide mit dreieckiger Grundfläche: 220 Tennisbälle

$n = Anzahl\ Stockwerke$

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Beide Verallgemeinerungen lassen sich u.a. mittels vollständiger Induktion beweisen.

Aufgabe 3

a. Wie wurde geschätzt (Vorgehen)?

   Warum ist die Schätzung relativ genau, warum ziemlich daneben?

b. Die Pyramide mit dreieckiger Grundfläche ist höher, da bei der Pyramide mit quadratischer Grundfläche die Tennisbälle «tiefer» sitzen.

Aufgabe 4
Pyramide mit dreieckiger Grundfläche:

a. Bei einer Raumhöhe von 3 m hat die Pyramide ca. 55 Stockwerke.
b. Es wären über 29 000 Tennisbälle nötig.
c. Die Masse würde ca. 1700 kg betragen.
d. Die Kosten beliefen sich auf über 50 000 CHF.
e. Die Holzrahmen hätten eine Seitenlänge von ca. 3 m 70 cm.

Pyramide mit quadratischer Grundfläche:

a. Bei einer Raumhöhe von 3 m hat die Pyramide ca. 63 Stockwerke.
b. Es wären über 85 000 Tennisbälle nötig.
c. Die Masse würde ca. 4900 kg betragen.
d. Die Kosten beliefen sich auf über 147 000 CHF.
e. Der Holzrahmen hätte eine Seitenlänge von ca. 3 m 70 cm.

Auftrag D2: Umschüttversuche

Aufgabe 1

a. Der Inhalt einer Pyramide passt «ziemlich» genau 3x in das entsprechende Prisma mit gleicher Höhe und gleicher Grundfläche.
b. Aufgrund der gemachten Messerfahrungen von a. lässt sich nun die Formel herleiten und/oder nachvollziehen:

   Grundfläche mal Höhe = Volumen des Prismas
   Volumen des Prismas geteilt durch 3 = Volumen der Pyramide

Aufgabe 2

Aufgrund der Messerfahrungen von Aufgabe 1 sollte vermutet werden,
dass sich die Massen der gefüllten Füllkörper im Verhältnis 1 zu 3 bzw. 3 zu 1 verhalten.

Auftrag D3: Massen vergleichen

Vorbereitung

- Die Körper bestehen aus Beton, Silikon, Gipsmasse, ...
- An dieser Station braucht es ein Arbeitsblatt «Massen von Prismen und Pyramiden».

Aufgabe 1

a. Die Pyramiden sind ungefähr 3x leichter als die entsprechenden Prismen mit gleicher Höhe und gleicher Grundfläche.
b. Aufgrund der gemachten Messerfahrungen von a. lässt sich nun die Formel herleiten und/oder nachvollziehen:
   – Grundfläche mal Höhe = Volumen des Prismas
   – Volumen des Prismas geteilt durch 3 = Volumen der Pyramide

Aufgabe 2

- Das Material kann Lufteinschlüsse aufweisen.
- Das Material ist nicht homogen.
- Teile können abgebröckelt sein.
- Ungenauigkeiten während der Produktion
- ...

Auftrag D4: Theorie-Ecke

Vorbereitung

An dieser Station braucht es ein Arbeitsblatt «Pyramiden aus Holzwürfeln».

Aufgabe 1

a. –

b. 5. Pyramide: 55 Holzwürfe
   6. Pyramide: 91 Holzwürfel
c. Das «Experiment» soll zeigen, dass dieses Vorgehen bzw. diese Methode mit Computerunterstützung sinnvoll beschleunigt werden kann.

Kantenlänge s	Anzahl Würfel im Umfwürfel	Anzahl Würfel in der Pyramide	$\frac{\text{Anzahl Würfel im Umwürfel}}{\text{Anzahl Würfel in der Pyramide}}$
10	1'000	385	2.597403
100	1'000'000	338'350	2.955519
1'000	1'000'000'000	333'833'500	2.995505
10'000	#############	333'383'335'000	2.999550
100'000	#############	#############	2.999955
1'000'000	#############	#############	2.999996
10'000'000	#############	#############	3.000000

Bildet man den Grenzwert für n gegen Unendlich (n=Anzahl Schichten) des Verhältnisses von «Umwürfel» zu Pyramide so konvergiert die Folge.

Beweis: n^3 ausklammern, kürzen, Nullfolgen eruieren, fertig.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\right)=\frac{6n^3}{2n^3+3n^2+n}=3$$

Aufgabe 2

a. –
b. Die Simulation zeigt, dass mit einer Stufenpyramide (Quader) das Volumen der eigentlichen Pyramide von Innen und Aussen angenähert werden kann, indem die Stufenhöhe verringert wird.

   - Die Summen der Stufen der Aussen- und Innenpyramide haben denselben Grenzwert. Die Differenz ihrer Volumina konvergiert gegen 0. Für einen Nachweis braucht man die Werkzeuge der Analysis (SEK II).
   - Vergleicht man die Volumina der Stufenpyramiden mit dem Volumen des Umwürfels, lässt sich feststellen, dass die Stufenpyramiden jeweils ca. ein Drittel des Würfelvolumens ausmachen. Im Grenzfall ist das Volumen der Pyramide ein Drittel des Würfelvolumens.

Aufgabe 3

Ja, das geht auch. Werden in einen Umwürfel mit konstantem Volumen Pyramiden aus immer kleineren Würfeln gebaut, werden die Seitenflächen immer «glatter», die Würfelbauten also immer pyramidenähnlicher.
Im Grenzfall ist das Volumen des Umwürfels dreimal so gross wie das Volumen der Pyramide, also ist das Volumen der Pyramide ein Drittel des Würfelvolumens.

Aufgabe 4

Für die SuS der SEK I bleiben diese beiden Methoden wahrscheinlich auch «ungenau», da wir die Ergebnisse bei Aufgabe 1 und 2 «nur» gesehen haben und den Computer rechnen liessen.

Nichtsdestotrotz spiegelt sich das Konzept «Grenzwert» wider:

- Bei Aufgabe 1 bauen wir immer grössere Pyramiden aus Holzwürfeln, was bedeutet, dass wir uns immer näher an die «richtige» Pyramidenform herantasten... dort wollen wir ja hin.
- Bei Aufgabe 2 machen wir die «Platten» immer dünner, was ebenso bedeutet, dass wir uns der «richtigen» Pyramidenform annähern.

Konkret wurden die Methoden vorgestellt, aber wir haben noch keinen Beweis erbracht, dass unsere Vermutungen und Feststellungen korrekt sind. Dies ist jedoch erst mit den Werkzeugen der Analysis (SEK II) möglich.

Auftrag D5: Pyramiden «addieren»

Vorbereitung

- Das Vorwissen der SuS soll mit diesen Einstiegsfragen aufgegriffen werden.
- Eine adäquate Fachsprache wird angestrebt: Korrektes Benennen der Körper und ihrer Eigenschaften.

Aufgabe 1

a. Mit etwas Geduld lassen sich alle drei kongruenten Pyramiden vollständig in den Würfel legen.
b. Mögliche Argumentationsaspekte:
   – Die Grundflächen der Pyramiden sind jeweils Würfelseiten, ergo gleich gross.
   – Alle drei Pyramiden haben dieselbe Höhe (= Würfelkante)
   – Alle drei Pyramiden treffen sich in derselben Würfelecke.
   – Da die drei Pyramiden kongruent sind, besitzen sie je ein Drittel des Würfelvolumens.

Achtung Spezialfall: Die Situation mit drei kongruenten Pyramiden tritt nur beim Würfel auf!

Aufgabe 2

a. Mit etwas Geduld lassen sich alle drei Pyramiden vollständig in das Prisma legen.
b. Unterschied zu Aufgabe 1: Hier sind nur zwei der drei Pyramiden kongruent.
c. Mögliche Argumentationsaspekte:
   – Zwei der drei Pyramiden sind offensichtlich kongruent. Alle drei Pyramiden haben dieselbe Höhe (= Würfelkante).
   – Die dritte Pyramide hat das gleiche Volumen wie die beiden anderen Pyramiden. Ebenfalls lässt sich eine gleiche Grundfläche und gleiche Höhe eruieren, wenn die Pyramide gekippt wird. Nach dem Prinzip von Cavalieri folgt die Volumengleichheit aller Pyramiden.
   – Die Pyramiden besitzen sie je ein Drittel des Prismenvolumens.

Achtung Spezialfall: Es handelt sich immer noch um einen Spezialfall (Grundfläche des Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck). Zu zeigen wäre noch, dass die Zerlegung auch klappt, wenn die Grundfläche nicht regulär ist. Folglich lassen sich dann alle Prismen in Dreiecksprismen zerlegen.

Aufgabe 3

a. Mit etwas Geduld lassen sich alle sechs kongruenten Pyramiden vollständig zu einem Würfel zusammensetzen.

→ **Hinweis:** Die Pyramiden lassen sich wie ein Würfelnetz anordnen und zusammenkleben.

b. Mögliche Argumentationsaspekte:
   - Die Grundflächen der Pyramiden sind jeweils Würfelseiten, ergo gleich gross.
   - Alle sechs Pyramiden haben dieselbe Höhe (= halbe Länge der Würfelkante).
   - Alle sechs Pyramidenspitzen treffen sich in der Mitte des Würfels.
   - Da die sechs Pyramiden kongruent sind, besitzen sie je ein Sechstel des Würfelvolumens.

$\mathrm{a} = \text{Kantenlänge des Würfels}$

$a^2 = \mathrm{G} = \text{Grundfläche der Pyramide}$

$\frac{1}{2}\,\mathrm{a} = \text{Höhe der Pyramide}$

$$\mathrm{V}_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6}\,\mathrm{V}_{\text{Würfel}} = \frac{1}{6}\mathrm{a}^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{a}\cdot\mathrm{a}^2 = \frac{1}{3}\cdot\mathrm{a}^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{a} = \frac{1}{3}\cdot\mathrm{G}\cdot\mathrm{h}$$

Achtung Spezialfall: Die Situation mit sechs kongruenten Pyramiden tritt nur beim Würfel auf!

Aufgabe 4

a. Das grosse Holzmodell veranschaulicht den **Satz von Cavalieri**:

   - Zwei Körper gleicher Höhe sind volumengleich, wenn sie in jeweils gleicher Höhe flächengleiche Querschnitte haben. Zum Beweis dieses Satzes ist die Integralrechnung notwendig, er kann hier nicht durchgeführt werden.
   - Kurz: Das Volumen bleibt gleich, egal wo die Pyramidenspitze liegt.

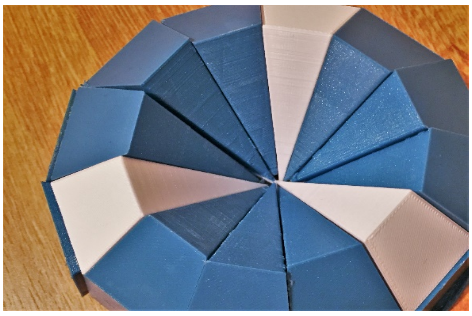
Siehe oben bei Achtung Spezialfall.

Ideen zur Fortführung im Klassenzimmer

Falls die Faszination “Pyramidenvolumen” anhält, findest du hier weitere Anregungen für den Unterricht.

- Collage erstellen mit Bildern von unterschiedlichen Pyramiden, die in unserer Umwelt existieren (Louvres, Dach des Wasserturms, ...)
- Modelle aus festem Papier herstellen (polyhedra.net)
- Abwicklungen thematisieren.
- Fermi-Fragen erweitern: Wie viele Tennisbälle gibt es in der Schweiz. Wie hoch wäre die Pyramide, die sich damit bauen lässt. Wie schwer, wie teuer, ...?
- Welche der nun bekannten Zugänge zur Volumenberechnung von Pyramiden lassen sich auf weitere Pyramidentypen übertragen bzw. anwenden? Warum, warum nicht?
- Das Konzept “Grenzwert” mit Hilfe von Folgen und Reihen erfahrbar machen.
- Wie lassen sich die Höhe der Tennisball-Pyramiden rechnerisch bestimmen? Wie die Anzahl der benötigten Tennisbälle?

Station E – Damit es rund läuft: Die Kugel



Sachanalyse

Auftrag E1 «Seil um Seil – Kugeloberfläche»

Bei der ersten Station E1 «Seil um Seil – Kugeloberfläche», der «Abwicklung» der Kugeloberfläche auf Kreise, werden Beziehungen zwischen Kreis- und Kugelformel deutlich. Die Oberfläche der Halbkugel entspricht, gemäss Umlegen der Seile, jener von zwei Kreisen mit identischem Radius ($2\pi r^2$), folglich lautet die Formel für die Oberfläche der ganzen Kugel $4\pi r^2$.

Wird das Seil bei der Holzplatte nicht ganz aussen und nicht kompakt genug befestigt, kann es sein, dass in der Mitte noch Seil übrigbleibt. Beachte dazu: Bei der Halbkugel findet die erste Umrundung (ganz unten) ausserhalb des Durchmessers von 40 cm statt. Deswegen soll die erste Umrundung auch auf der Platte soweit aussen wie möglich gemacht werden. Zudem verfälschen die Magnete auf dem Seil (Höhe 2mm und etwas Leim darunter) die Oberfläche auf der Kugel etwas. Ebenso greift das Seil auf der runden Oberfläche der Kugel im Gegensatz zur ebenen Oberfläche auf der Platte etwas ineinander über, braucht also auf der Kugel leicht weniger Platz.

E2 «Runden bauen – Kugelvolumen»

Die zweite Station E2 «Runden bauen – Kugelvolumen», der Annäherung an das Kugelvolumen durch das Zusammensetzen von Pyramiden, setzt die Kenntnis der Pyramiden- sowie der Kugeloberflächenformel voraus. Es wird die Analogie zu einer Discokugel verwendet: Bei dieser stellen die Plättchen auf der Oberfläche jeweils die Grundfläche (A) einer Pyramide mit der Höhe des Radius der Kugel dar. In der Kugelmitte treffen sich theoretisch unendlich viele Spitzen beliebig schmaler Pyramiden, was für das Kugelvolumen bedeutet:

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots) \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \text{Kugeloberfläche} \cdot r$$

Die Kugeloberfläche ist bekannt, also:

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Vernetzung mit der Lehrmittelbuchreihe «mathbuch»

Die Kugel ist im LP21 nicht explizit vorgesehen, aber in einer Differenzierungsphase zur Vertiefung einsetzbar (mathbuch 3 LU 16 resp. mathbuch 3+ LU 25).

Lösungen zu den Aufträgen und Aufgaben

Lösungen zu den Aufträgen kann man der Sachanalyse oben entnehmen.

Hinweis: Die Herleitung der Volumenformel muss evtl. nachträglich im Klassenzimmer erfolgen, weil sie in der LWS zu viel Zeit erfordert.

Ideen zur Fortführung im Klassenzimmer

Es bietet sich an, die Oberfläche und das Volumen der Kugel mit anderen Körpern zu vergleichen. Am besten solchen, die auch etwas Kreisrundes in ihrer Form aufweisen können, beispielsweise ein Zylinder oder ein Kreiskegel. Entsprechen die Höhen dieser Körper dem Radius der Kugel und ist der jeweilige Grundkreis kongruent zum Grundkreis einer Halbkugel, ergibt sich das bemerkenswerte Resultat:

$$V_{Zylinder} = V_{Halbkugel} = V_{Kegel} = 3 : 2 : 1$$

Auch der Vergleich der Oberfläche von Zylinder (h = r wiederum) und Kugel ist aufschlussreich.

Konkrete Vertiefungen zu den beiden Kugel-Exponaten

- Welchen Flächeninhalt (Angabe in m^2) deckt die Kugeloberfläche (r = 40 cm) respektive decken die beiden Kreisscheiben tatsächlich ab?
- Wie viel Seil (Angabe in cm) braucht man für die Umrundung des Umfangs der Halbkugel (r = 40 cm) oder eines eingezeichneten Kreises? → zuerst schätzen, dann berechnen
- Wie lang sind die beiden Seile, welche die Kreisscheiben (r = 40 cm) oder die Halbkugel bedecken?
- Aus «einfachen» mathematischen Berechnungen lässt sich die tatsächliche Länge der Seile nicht bestimmen… - Warum nicht? Welche Überlegungen müssen miteinbezogen werden?
- Kannst du (z.B. mit einer Skizze) zeigen, wie man auf die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises kommt?
- Wie ändert sich das Kugelvolumen, wenn du den Radius verdoppelst, verdreifachst, usw.?