



Ausbildung – Vorbereitungskurse

# Fachdossier Mathematik

Niveau I

Anforderungen im Fachbereich Mathematik für die Eintrittsprüfung Niveau I  
an die Pädagogische Hochschule Luzern (PHLU)

## Änderungskontrolle

Version	Datum	Visum	Bemerkung zur Art der Änderung
11/18	16.11.2018	Michel Hauswirth	Aktualisierung Prüfungsreglement / Layout
11/20	29.11.2020	Martin Sprecher Martin Lacher Urs Krummenacher	Aktualisierung Literaturliste / Musterprüfung
06/24	07.06.2024	Martin Sprecher Atilla Zemp	Überprüfung und kleine Korrekturen

[www.phlu.ch/vorbereitungskurse](http://www.phlu.ch/vorbereitungskurse)

PH Luzern · Pädagogische Hochschule Luzern  
Ausbildung  
Vorbereitungskurse  
Pfistergasse 20 · 6003 Luzern  
T +41 (0)41 203 01 35  
bruno.nihs@phlu.ch · www.phlu.ch

**Martin Sprecher**

## Inhaltsverzeichnis

1	Lernziele.....	4
2	Inhalte.....	4
3	Prüfungsmodalitäten und Beurteilungskriterien .....	6
4	Empfohlene Literatur .....	6
5	Musterprüfung.....	7
6	Musterprüfung Lösungen.....	14

## Fachdossier Mathematik

### 1 Lernziele

Die Kandidatinnen und Kandidaten

- kennen wichtige Begriffe, Ergebnisse und Methoden aus der Algebra, Geometrie, Stochastik und Analysis;
- beherrschen die Formelsprache sowie wichtige Rechentechniken;
- kennen Problemlösestrategien und wenden sie an;
- erfassen (Sach-)Probleme, mathematisieren und modellieren sie;
- interpretieren Ergebnisse und beurteilen Methoden;
- stellen sich (raum-)geometrische Situationen vor und können sie darstellen;
- setzen (technische) Hilfsmittel zweckmässig ein.

### 2 Inhalte

**A. Als Grundlage und Voraussetzung beim Kurseintritt dienen die Kenntnisse des Mathematikstoffes, der in der Volksschule bis Ende 9. Klasse im Niveau A der Sekundarstufe I behandelt wird; insbesondere folgende Themen:**

#### Aus der Arithmetik

- Grundbegriffe der Zahlentheorie (Primzahlen, grösster gemeinsamer Teiler [ggT], kleinste gemeinsame Vielfache [kgV] usw.)
- Grundoperationen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen (Bruchrechnen); Potenzrechnen
- Prozent- und Zinsrechnen
- Direkte und indirekte Proportionalität
- Termumformungen, binomische Formeln und Faktorzerlegung
- Funktionsdarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem

#### Aus der Geometrie

- Wichtige geometrische Ortslinien (Kreis, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Mittelparallele)
- Eigenschaften der Figuren Dreieck und Viereck mit allen Spezialfällen; deren Flächeninhalt
- Satz des Pythagoras; Höhensatz
- Umfang und Flächeninhalt eines Kreises
- Ähnlichkeit und Strahlensätze

**B. Für die Zulassungsprüfung werden Kenntnisse und Fähigkeiten in folgenden Stoffbereichen erwartet:**

#### Aus der Mengenlehre

- Definition und Darstellung von Mengen sowie Mengenoperationen (Durchschnitt, Vereinigung, Differenz) verstehen und anwenden können
- Aussagen und deren Verknüpfungen verstehen und anwenden können

## Aus der Arithmetik

- Den Aufbau von Zahlssystemen verstehen und in mathematischen Anwendungen nutzen
- Die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen bis zu den reellen Zahlen begründen und die zugehörigen Operationen beherrschen

## Aus der Algebra

- Den Logarithmus verstehen und zur Lösung von Gleichungen einsetzen
- Folgen (in der expliziten und rekursiven Darstellung) und Reihen als wichtiges mathematisches Instrumentarium zum Beispiel für Finanzmathematik einsetzen und mit dem Begriff unendlich umgehen können
- Quadratische Gleichungen lösen und die Lösungsmethode beschreiben

## Aus der Analysis

- Den Funktionsbegriff verstehen und verschiedene Darstellungen kennen
- Den Funktionsbegriff an elementaren Funktionen (lineare, quadratische, trigonometrische, Exponentialfunktion) anwenden und für die Lösung praktischer Problemstellungen einsetzen

## Aus der Geometrie

- Die Eigenschaften von kongruenten und ähnlichen Figuren kennen und anwenden
- Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis erklären und anwenden
- Trigonometrische Aufgaben in rechtwinkligen Dreiecken lösen
- Die Strahlensätze kennen und anwenden
- Oberflächen- und Volumenberechnungen von prismatischen Körpern, Pyramiden, Kegel und Kugel durchführen
- Kopfgeometrie (Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens)

## Aus der Stochastik

- Zahlenmaterial bearbeiten und interpretieren, Masszahlen berechnen: Stichprobe, Klasseneinteilung, absolute und relative Häufigkeit, Histogramme, Boxplot, Mittelwerte (arithmetisches Mittel, Median, Modus), Standardabweichung
- Grundfiguren (Permutation, Variation, Kombination) der Kombinatorik kennen und anwenden
- Elementare Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung lösen mittels:
- Ereignisse, universelle (disjunkte) Ereignisse, Gegenereignis, unabhängige Ereignisse
- Vereinigung und Schnitt von Ereignissen
- Laplace - Experimente
- Bernoulli - Experimente (Bernoulli-, Binomial-, geometrische und hypergeometrische Verteilung)
- mehrstufige Zufallsexperimente
- der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeit
- Die Verteilung von Zufallsvariablen bestimmen und damit den Erwartungswert von Zufallsvariablen berechnen; Gewinnerwartung in einem (fairen) Spiel berechnen und interpretieren

## 3 Prüfungsmodalitäten und Beurteilungskriterien

<b>Prüfungsform</b>	schriftlich
<b>Zeit</b>	120 Minuten
<b>Hilfsmittel</b>	Taschenrechner TI-30 oder vergleichbarer Typ ( <b>nicht</b> grafikfähig, <b>nicht</b> programmierbar, <b>nicht TI-30X Pro</b> ); Formelsammlung (z.B. Fundamentum oder vergleichbar, ohne eigene Ergänzung; Ergänzungsblatt vom Dozenten)
<b>Durchführung</b>	Juni, Wiederholung im August oder im Juni des darauffolgenden Jahres

Beachten Sie

- Der Lösungsweg ist genau zu dokumentieren, auch wenn zur Berechnung der Taschenrechner eingesetzt wird.
- Der Notenmassstab ist linear. Es wird mathematisch auf halbe Noten gerundet. Die Note wird gemäss folgender Formel berechnet:  $\text{Anzahl erreichte Punkte} / \text{Maximalpunktzahl} * 5 + 1$
- Die Musterprüfung macht deutlich, dass nicht der Stoff aus der Volksschule, wie er unter A (siehe Seite 1) aufgeführt ist, sondern die zusätzlichen Kenntnisse und Fertigkeiten unter B (siehe Seite 2ff.) geprüft werden. Aus der Tatsache, dass einzelne Themen in der Musterprüfung nicht vorkommen, darf aber nicht geschlossen werden, dass sie nicht prüfungsrelevant sind! Die Musterprüfung deckt einen Ausschnitt aus allen möglichen Themen ab. Sie soll Ihnen einen Eindruck vermitteln, wie die Zulassungsprüfung aufgebaut ist.

## 4 Empfohlene Literatur

Folgende Bücher enthalten Abschnitte, die die oben erwähnten Inhalte abdecken:

- **Fundamentum Mathematik und Physik**; Formeln, Begriffe, Tabellen, ... Orell Füssli, 2019; ISBN 978-3-280-04192-5 (darf an der Prüfung benutzt werden)
- **DUDEN Mathematik**, Basiswissen Schule 5. bis 10. Klasse; Buch und CD-Rom in Verbindung mit dem Internet paetec Berlin und Bibliographisches Institut, Mannheim, 2008; ISBN 978-3-411-71502-2
- Deller, Gebauer, Zinn; **Algebra 1 und 2**, Orell Füssli, 2015; ISBN 978-3-280-02795-0 und 978-3-280-02797-4
- **Grundlagen der Mathematik** für Schweizer Maturitätsschulen, Klett und Balmer, Lambacher Schweizer 7/8, ISBN 978-3-264-83981-4, Lambacher Schweizer 9/10, ISBN 978-3-264-83982-1, 11/12, ISBN 978-3-264-83983-8
- **Einführung in die Beurteilende Statistik**, Schroedel, Braunschweig, 2007, ISBN 978-3-507-83214-5

## 5 Musterprüfung

### 1 Mengen- und Zahlenlehre

#### Aufgabe 1.1

Kindergarten. [2 P] In einem Kindergarten mit 18 Kindern können 14 bereits ihren Namen schreiben, 10 vorwärts- und 7 rückwärtszählen. 4 Kinder können ihren Namen schreiben, sowie vorwärts- und rückwärtszählen. Halb so viele, wie diejenigen, welche alle drei Fähigkeiten besitzen, können nur vorwärtszählen und ihren Namen schreiben. Ein Kind kann nur vorwärtszählen. Wie viele Kinder können nur ihren Namen schreiben? Stellen Sie die Situation in einem Venn-Diagramm dar und beantworten Sie die Frage.

#### Aufgabe 1.2

Venn Diagramm [2 P] Schraffieren Sie die Menge  $(A \setminus B) \cap C$ . Geben Sie die rot schraffierte Fläche in korrekter Mengenschreibweise an.



#### Aufgabe 1.3

Zahlsysteme [2 P] Addieren Sie die drei Zahlen  $(2015)_9$ ,  $(2016)_9$  und  $(2017)_9$  im Neunersystem.

## 2 Funktionen

### Aufgabe 2.1

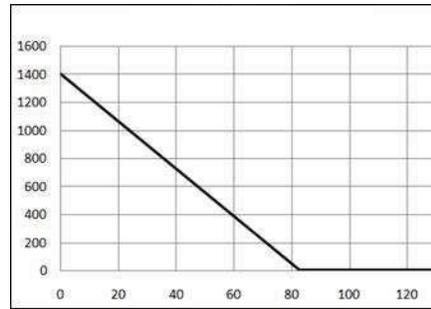
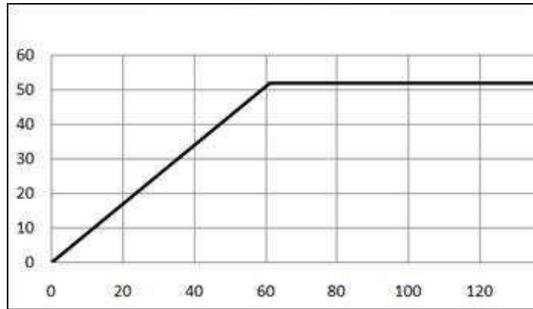
Brunnen. [2 P] Rechts abgebildet sehen Sie einen Brunnen mit den Massen

360 cm x 75 cm x 58 cm. Die beiden Diagramme ordnen einem bestimmten Zeitpunkt die

Füllhöhe zu. Interpretieren Sie diese Diagramme, indem Sie in zwei, drei Sätzen je eine

kurze Geschichte schreiben, die zu den jeweiligen Diagrammen passt. Beschriften Sie die

Achsen der Diagramme richtig.



Grid area for writing answers to Aufgabe 2.1.

### Aufgabe 2.2

Familienglück. [2 P] Eine Mutter, ein Vater und ihr Kind machen einen Spaziergang. Auf dem Rückweg,

einen Kilometer vor dem Zuhause beginnt das Kind zu schreien und möchte seinen Schoppen. Der Vater

rennt mit der Geschwindigkeit 12 Kilometer pro Stunde nach Hause, schnappt sich ohne zu warten den

bereitstehenden Schoppen und rennt mit der gleichen Geschwindigkeit zurück. Die Mutter und das Kind

laufen während der Abwesenheit des Vaters mit 3 Kilometer pro Stunde heimwärts. Bestimmen Sie

graphisch, wann und wie weit von zuhause entfernt das Kind zu seinem Schoppen kommt.

Grid area for writing answers to Aufgabe 2.2.

## 3 Stochastik

### Aufgabe 3.1

Beleuchtung. [1 P] In einem Raum gibt es 8 Lampen, die man unabhängig voneinander ein- und ausschalten kann. Wie viele Beleuchtungsarten gibt es, wenn mindestens 6 Lampen brennen sollen?



### Aufgabe 3.2

Spielnachmittag. [1 P] An einer Geburtstagsparty nehmen 8 Kinder, 5 Mädchen und 3 Knaben teil. 4 Kinder spielen ein Kartenspiel. Die Gruppe muss zwingend aus Mädchen und Knaben bestehen, das heisst, dass in einer Gruppe jeweils mindestens ein Mädchen und mindestens ein Knabe sein muss. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine solche Vierergruppe zusammen zu stellen?



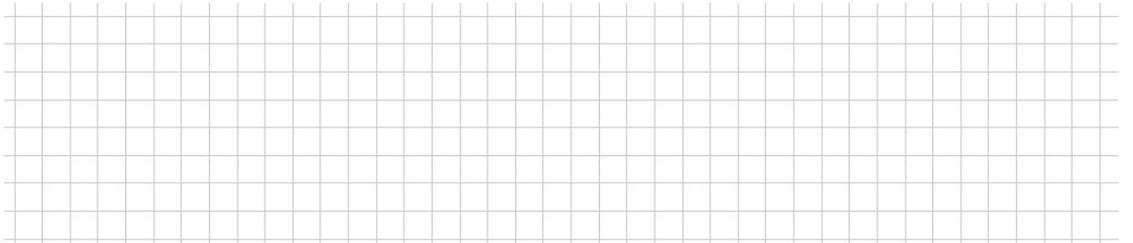
### Aufgabe 3.3

Ausschuss. [1.5 P] Ein Computerhersteller will eine neue Bestückungsmaschine für Platinen kaufen. Die Ausschussrate beträgt 5 %. Zur Kontrolle wird ein Probelauf mit 20 Platinen durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man höchstens 2 fehlerhafte Platinen?



### Aufgabe 3.4

Glücksspiel. [2 P] Petra und Klaus spielen folgendes Spiel. Petra bezahlt Klaus einen Einsatz von Fr. 10.-. Dafür darf sie aus einem Topf mit einer roten, einer gelben und zwei grünen Kugeln zwei Kugeln ohne Zurücklegen ziehen. Zieht sie eine grüne und eine gelbe Kugel (Reihenfolge unwichtig), gewinnt sie einen bestimmten Betrag  $x$ . Zieht sie zwei grüne Kugeln gewinnt Petra Fr. 2.-. In den anderen Fällen gibt es keine Auszahlung. Wie gross muss  $x$  sein, wenn das Spiel fair sein soll?



## Aufgabe 3.5

Kugeln. [2 P] Ein Topf enthält 100 Kugeln. 70 Kugeln bestehen aus dem Material Holz und 30 Kugeln sind aus Kunststoff. 25 der Holzkugeln sind mit der Farbe rot gestrichen und 45 sind grün. 10 der Kunststoffkugeln sind rot und 20 sind grün. Jemand zieht eine Kugel und sieht, dass sie grün ist. Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene Kugel aus Kunststoff ist?

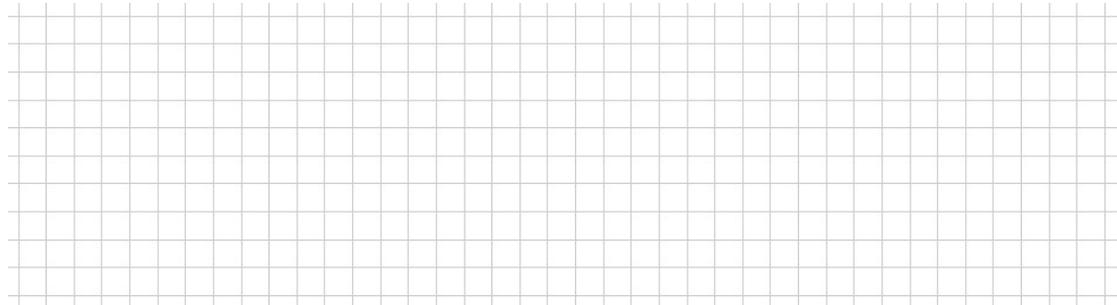


## Aufgabe 3.6

IQ. [1 P] Von 13 Studierenden wurde der Intelligenzquotient ermittelt:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
IQ	113	118	134	98	95	109	130	107	116	116	105	123	86

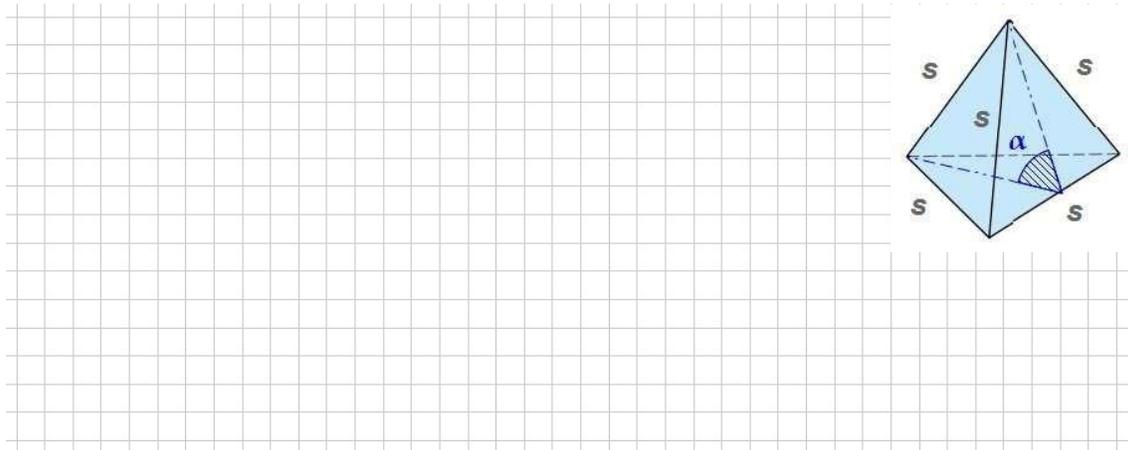
Zeichnen Sie für dieses Zahlenmaterial den Boxplot!



## 4 Geometrie

### Aufgabe 4.1

Tetraeder. [2 P] Die Oberfläche eines regelmässigen Tetraeders wird von 4 kongruenten, gleichseitigen Dreiecken von je  $s = 10$  cm Seitenlänge gebildet. Diese Dreiecke schliessen paarweise den gleichen Winkel  $\alpha$  ein. Wie gross ist Winkel  $\alpha$ ?



### Aufgabe 4.2

Schatten. [2 P] Eine 6 m hohe Mauer wirft einen 7.2 m langen Schatten. Wie gross ist ein Mann, der sich gerade noch ganz im Mauerschatten befindet, wenn er in einer Entfernung von 5.1 m zur Mauer steht? Fertigen Sie eine Skizze der Situation an und berechnen Sie die Grösse des Mannes.

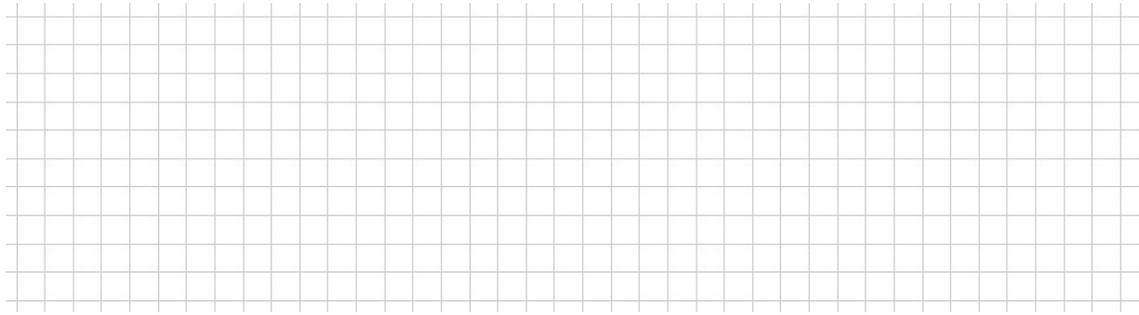


### Aufgabe 4.3

Flächeninhalt. [2 P] Kurt behauptet: "Wenn der Radius einer Kugel verdoppelt wird, so verdoppelt sich auch ihr Volumen." Nehmen Sie Stellung.

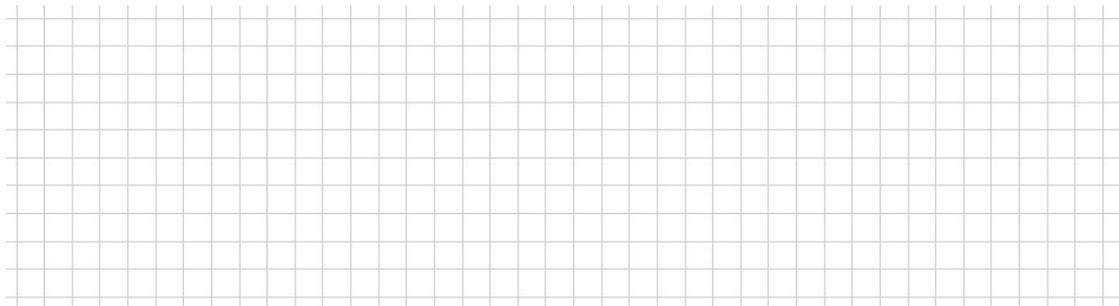






## Aufgabe 5.3

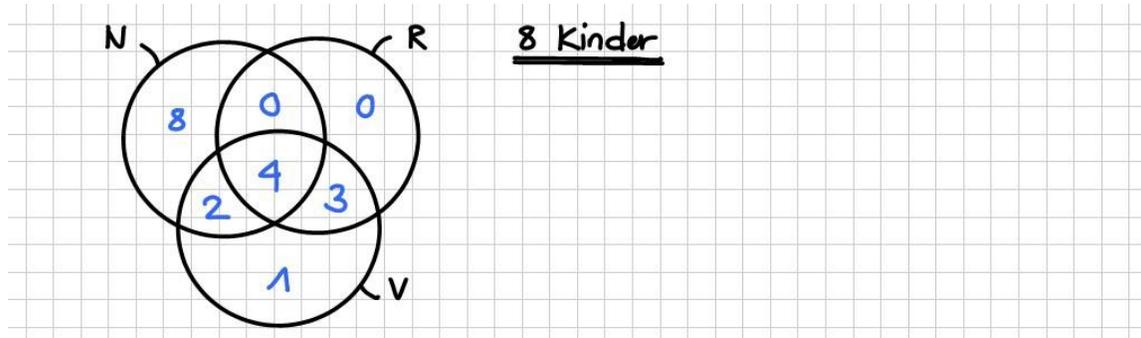
Summe. [2 P] Gegeben sei die arithmetische Folge mit  $a_1 = 3$  und  $a_2 = 4\frac{1}{2}$ . Welche Nummer hat das letzte Glied der entsprechenden Reihe, damit die Summe 4620 ergibt?



## 6 Musterprüfung Lösungen

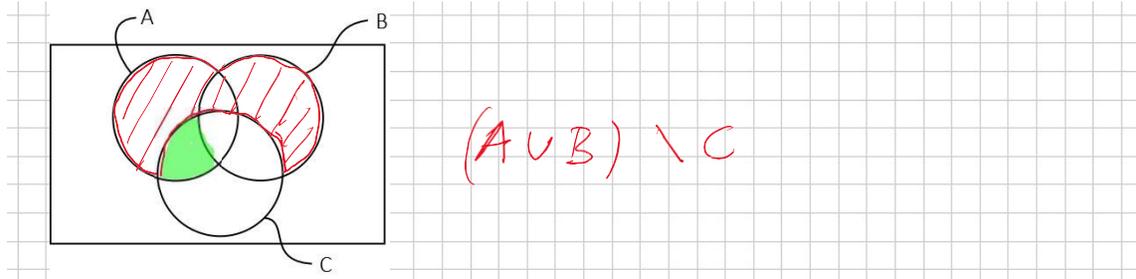
### 1 Mengen- und Zahlenlehre

Aufgabe 1.1



Aufgabe 1.2

Venn Diagramm [2 P] Schraffieren Sie die Menge  $(A \cup B) \setminus C$ . Geben Sie die rot schraffierte Fläche in korrekter Mengenschreibweise an.



Aufgabe 1.3



## 2 Funktionen

### Aufgabe 2.1

$$V = 36 \text{ dm} \cdot 7,5 \text{ dm} \cdot 5,8 \text{ dm} = 1566 \text{ dm}^3 \hat{=} 1566 \text{ L}$$

#### Graph Links

x-Achse Zeit in Minuten / y-Achse Füllhöhe in cm

Der Brunnen ist zu Beginn leer.

Der Zulauf wird geöffnet, nach 60 Minuten ist die Höhe (ca. 52 cm) des Überlaufs erreicht.

Da zusätzlich einflussendes Wasser nun über den Überlauf abfließt, verbleibt die Füllhöhe bei 52 cm.

#### Graph rechts

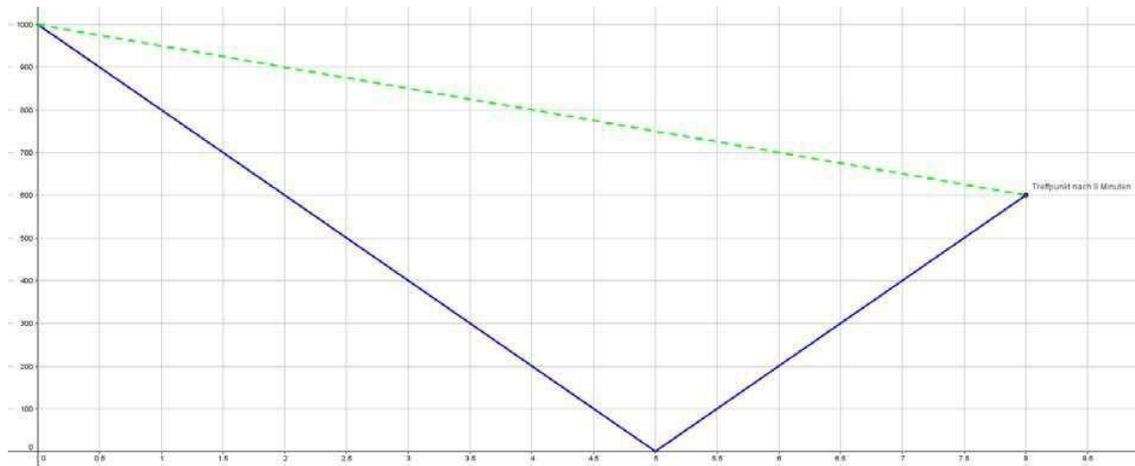
x-Achse Zeit in Minuten / y-Achse Füllmenge in Litern

Im Brunnen befinden sich zu Beginn 1400 Liter Wasser.

Da der Abfluss offen ist, fließt das Wasser aus.

nach 80 Minuten ist der Brunnen leer

### Aufgabe 2.2



Der Vater stösst 600m von zu Hause entfernt nach 8 Minuten wieder zu Mutter und Kind. Solange muss die Mutter also das Geschrei des Kindes aushalten.

## 3 Stochastik

### Aufgabe 3.1

$$n = 8 \quad \text{Reihenfolge unwichtig} \quad \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = \underline{\underline{37 \text{ Mögl.}}}$$

$$k = 6, 7, 8 \quad \text{ohne Wiederholung}$$

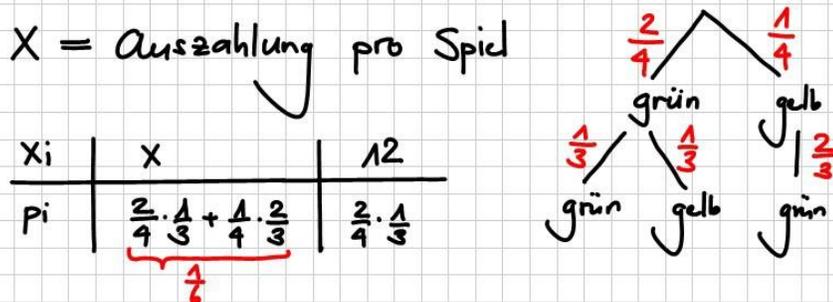
### Aufgabe 3.2

$$\text{alle Mögl.} - \text{Anzahl Mögl. ohne } \sigma = \binom{8}{4} - \binom{5}{1} = \underline{\underline{65 \text{ Gruppen}}}$$

### Aufgabe 3.3

$$\begin{aligned} \underline{P(\text{höchstens } 2 \times \ddot{u})} &= P(0 \times \ddot{u}) + P(1 \times \ddot{u}) + P(2 \times \ddot{u}) = \\ &= \binom{20}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^{18} \approx \\ &\approx 0,925 = \underline{\underline{92,5\%}} \end{aligned}$$

### Aufgabe 3.4

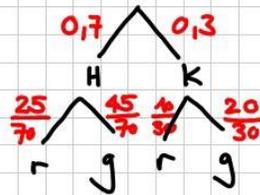


$$E(x) = x \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{2}{12} = 10 \quad | \cdot 6$$

$$x + 12 = 60$$

$$\underline{\underline{x = 48.-}}$$

## Aufgabe 3.5



$$\underline{\underline{P(K|g) = \frac{P(K \cap g)}{P(g)} = \frac{0,3 \cdot \frac{20}{30}}{0,7 \cdot \frac{45}{70} + 0,3 \cdot \frac{20}{30}} \approx 0,308 = \underline{\underline{30,8\%}}}}$$

## Aufgabe 3.6

geordnete Liste: 86; 95; 98; 105; 107; 109; 113; 116; 116; 118; 123; 130; 139

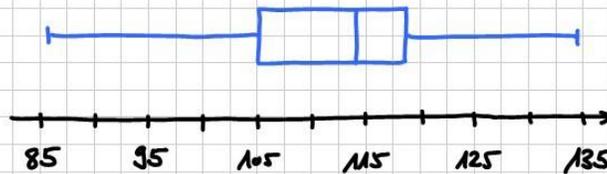
$$x_{\min} = 86$$

$$x_{\max} = 139$$

$$x_{\text{med}} = x_2 = x_7 = 113$$

$$q_1 = x_4 = 105$$

$$q_3 = x_{10} = 118$$



## 4 Geometrie

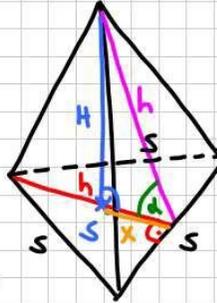
### Aufgabe 4.1

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10$$

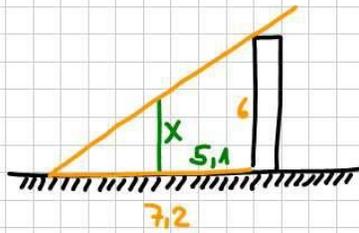
$$x = \frac{1}{3} h = \frac{10\sqrt{3}}{6}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{h}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{x}{h}\right) \approx \underline{\underline{70,5^\circ}}$$



### Aufgabe 4.2



$$\frac{x}{2,1} = \frac{6}{7,2}$$

$$\underline{\underline{x = 1,75 \text{ m}}}$$

### Aufgabe 4.3

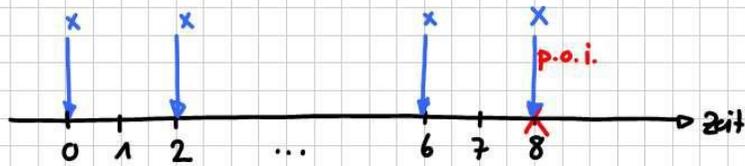
Diese Aussage ist falsch. Verdoppelt sich der Radius einer Kugel (der in der Formel in der 3. Potenz vorkommt), so verachtfacht ( $= 2^3$ ) sich das Volumen der Kugel.

### Aufgabe 4.4

1.  $\rightarrow c$ ; 2.  $\rightarrow c$ ; 3.  $\rightarrow a$

## 5 Folgen und Reihen – Logarithmen – Wachstum - Finanzmathematik

### Aufgabe 5.1



$$\underbrace{x + x \cdot 1,02^2 + \dots + x \cdot 1,02^8}_{\text{geom. Reihe}} = 18'500$$

geom. Reihe mit:  $a_1 = x$   
 $q = 1,02^2$   
 $n = 5$

$$x \cdot \frac{1 - (1,02^2)^5}{1 - 1,02^2} = 18'500$$

$$\underline{\underline{x \approx 3'412,87}}$$

### Aufgabe 5.2

$$1000 \cdot b^{0,5} = 2000$$

$$b^{0,5} = 2$$

$$b = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{+300\%}}$$

## Aufgabe 5.3

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$4620 = \frac{n}{2} (3 + 3 + (n-1) \cdot 1.5) \quad | \cdot 2$$

$$9240 = n(4.5 + 1.5n)$$

$$9240 = 4.5n + 1.5n^2 \quad | : 1.5$$

$$0 = n^2 + 3n - 6160$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 1 \cdot 6160}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 157}{2}$$

$$\frac{n_1 = 77}{n_2 = -80} \quad \downarrow$$